CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny — *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza
EMAP-P0-100-2305

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

DATA: **8 maja 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **46**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

W każdym z zadań od 1. do 29. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\log_9 27 + \log_9 3$ jest równa

A. 81 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 2

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\left(-\frac{3}{2}\right)$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\left(-\frac{2}{3}\right)$

Zadanie 3. (0–1)

Cenę aparatu fotograficznego obniżono o 15%, a następnie – o 20% w odniesieniu do ceny obowiązującej w danym momencie. Po tych dwóch obniżkach aparat kosztuje 340 zł. Przed obiema obniżkami cena tego aparatu była równa

A. 500 zł **B.** 425 zł **C.** 400 zł **D.** 375 zł

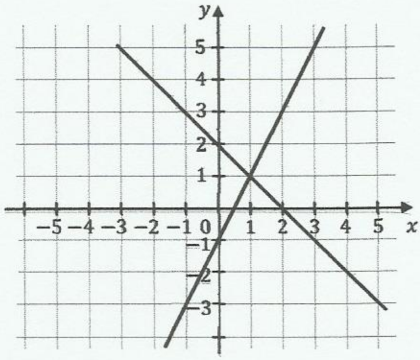
Zadanie 4. (0–1)

Dla każdej liczby rzeczywistej a wyrażenie $(2a-3)^2 - (2a+3)^2$ jest równe

A. $-24a$ **B.** 0 **C.** 18 **D.** $16a^2 - 24a$

Zadanie 5. (0–1)

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną jednego z niżej zapisanych układów równań.



Wskaż ten układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.

A. $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Zadanie 6. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$-2(x + 3) \leq \frac{2 - x}{3}$$

jest przedział

A. $(-\infty, -4\rangle$ **B.** $(-\infty, 4\rangle$ **C.** $\langle -4, \infty)$ **D.** $\langle 4, \infty)$

Zadanie 7. (0–1)

Jednym z rozwiązań równania $\sqrt{3}(x^2 - 2)(x + 3) = 0$ jest liczba

A. 3 **B.** 2 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Zadanie 8. (0–1)

Równanie $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2}=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązania.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: -1.

C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: 1.

D. ma dokładnie dwa rozwiązania: -1 oraz 1.

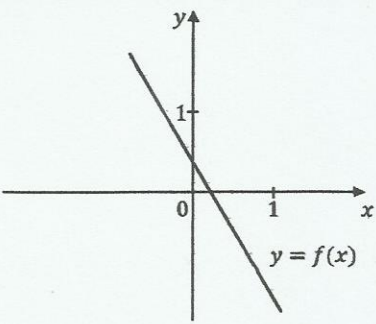
Zadanie 9. (0–1)

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(2p-1)x+p$ jest liczba (-4). Wtedy

A. $p=\frac{4}{9}$ B. $p=\frac{4}{7}$ C. $p=-4$ D. $p=-\frac{4}{7}$

Zadanie 10. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x)=ax+b$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji f w układzie współrzędnych (x,y).



Liczba a oraz liczba b we wzorze funkcji f spełniają warunki:

A. $a>0$ i $b>0$.

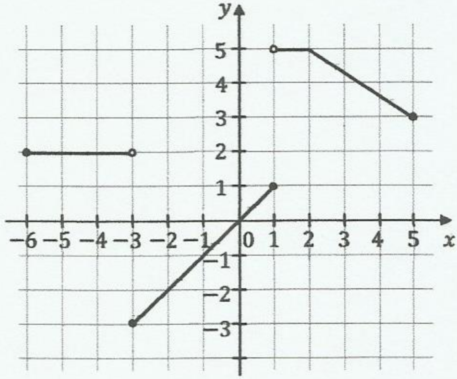
B. $a>0$ i $b<0$.

C. $a<0$ i $b>0$.

D. $a<0$ i $b<0$.

Informacja do zadań 11.–13.

W układzie współrzędnych (x, y) narysowano wykres funkcji $y = f(x)$ (zobacz rysunek).



Zadanie 11. (0–1)

Dziedziną funkcji f jest zbiór

A. $\langle -6, 5\rangle$ B. $(-6, 5)$ C. $(-3, 5\rangle$ D. $\langle -3, 5\rangle$

Zadanie 12. (0–1)

Funkcja f jest malejąca w zbiorze

A. $\langle -6, -3)$ B. $\langle -3, 1\rangle$ C. $(1, 2\rangle$ D. $\langle 2, 5\rangle$

Zadanie 13. (0–1)

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -4, 1\rangle$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 5

Zadanie 14. (0–1)

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba (-5). Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f, jest równa 3.
Drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba

A. 11 B. 1 C. (-1) D. (-13)

Zadanie 15. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n \cdot (n+1)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Wyraz a_4 jest równy

A. 64 **B.** 40 **C.** 48 **D.** 80

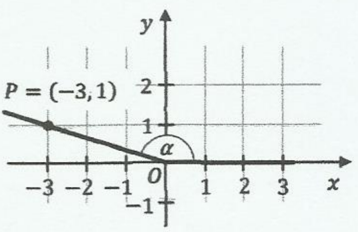
Zadanie 16. (0–1)

Trzywyrazowy ciąg $(27,\ 9,\ a-1)$ jest geometryczny.
Liczba a jest równa

A. 3 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 2

Zadanie 17. (0–1)

W układzie współrzędnych zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0,0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią Ox, a drugie przechodzi przez punkt $P = (-3,1)$ (zobacz rysunek).



Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **B.** $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{1}\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{3}\right)$

Zadanie 18. (0–1)

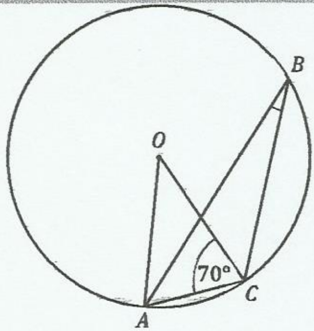
Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ jest równe

A. $\sin^2\alpha$ **B.** $\sin^6\alpha \cdot \cos^2\alpha$

C. $\sin^4\alpha + 1$ **D.** $\sin^2\alpha \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)$

Zadanie 19. (0–1)

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku w punkcie O.
Kąt ACO ma miarę $70°$ (zobacz rysunek).



Miara kąta ostrego ABC jest równa

A. $10°$ **B.** $20°$ **C.** $35°$ **D.** $40°$

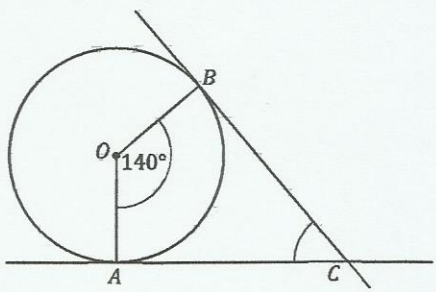
Zadanie 20. (0–1)

W rombie o boku długości $6\sqrt{2}$ kąt rozwarty ma miarę $150°$.
Iloczyn długości przekątnych tego rombu jest równy

A. 24 **B.** 72 **C.** 36 **D.** $36\sqrt{2}$

Zadanie 21. (0–1)

Przez punkty A i B, leżące na okręgu o środku O, poprowadzono proste styczne do tego okręgu, przecinające się w punkcie C (zobacz rysunek).

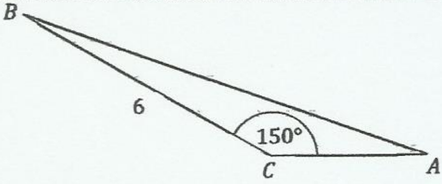


Miara kąta ACB jest równa

A. $20°$ **B.** $35°$ **C.** $40°$ **D.** $70°$

Zadanie 22. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = 6$. Miara kąta ACB jest równa $150°$ (zobacz rysunek).



Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka B jest równa

A. 3　　B. 4　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

Zadanie 23. (0–1)

Dana jest prosta k o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$.
Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest równoległa do prostej k i przechodzi przez punkt $P = (3,5)$, gdy

A. $a = 3$ i $b = 4$.

B. $a = -\frac{1}{3}$ i $b = 4$.

C. $a = 3$ i $b = -4$.

D. $a = -\frac{1}{3}$ i $b = 6$.

Zadanie 24. (0–1)

Dane są punkty $K = (-3,-7)$ oraz $S = (5,3)$. Punkt S jest środkiem odcinka KL. Wtedy punkt L ma współrzędne

A. $(13,10)$

B. $(13,13)$

C. $(1,-2)$

D. $(7,-1)$

Zadanie 25. (0–1)

Dana jest prosta o równaniu $y = 2x - 3$. Obrazem tej prostej w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta o równaniu

A. $y = 2x + 3$

B. $y = -2x - 3$

C. $y = -2x + 3$

D. $y = 2x - 3$

Zadanie 26. (0–1)

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość 15. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Długość przekątnej tego graniastosłupa jest równa

A. $15\sqrt{2}$ **B.** 45 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** 10

Zadanie 27. (0–1)

Średnia arytmetyczna liczb x, y, z jest równa 4.

Średnia arytmetyczna czterech liczb: $1 + x, 2 + y, 3 + z, 14$, jest równa

A. 6 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 13

Zadanie 28. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry $0, 5, 7$ (np. $57\,075, 55\,555$), jest

A. 5^3 **B.** $2 \cdot 4^3$ **C.** $2 \cdot 3^4$ **D.** 3^5

Zadanie 29. (0–1)

W pewnym ostrosłupie prawidłowym stosunek liczby W wszystkich wierzchołków do liczby K wszystkich krawędzi jest równy $\frac{W}{K} = \frac{3}{5}$.

Podstawą tego ostrosłupa jest

A. kwadrat. **B.** pięciokąt foremny.

C. sześciokąt foremny. **D.** siedmiokąt foremny.

Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$x(x-2) > 2x^2 - 3$$

$$x^2 - 2x - 2x^2 + 3 > 0$$

$$-x^2 - 2x + 3 > 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3$$

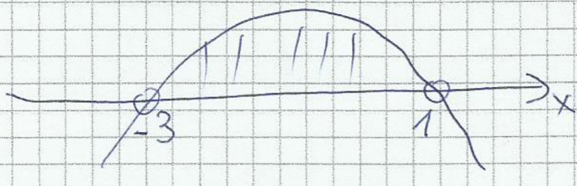
$$\Delta = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{2-4}{-2} \qquad x_2 = \frac{2+4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{-2} \qquad x_2 = \frac{6}{-2}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$$



$$x \in (-3; 1)$$

Zadanie 31. (0–2)

Pan Stanisław spłacił pożyczkę w wysokości 8910 zł w osiemnastu ratach. Każda kolejna rata była mniejsza od poprzedniej o 30 zł.

Oblicz kwotę pierwszej raty.

$S_{18} = 8910, \quad n = 18, \quad r = -30$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot (-30)}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{18}^{9} = 8910$$

$(2a_1 - 510) \cdot 9 = 8910 \; / : 9$

$2a_1 - 510 = 990$

$2a_1 = 1500 \; / : 2$

$a_1 = 750$ zł – pierwsza rata

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$$

$$x^2 + y^2 + 5 - 2x - 4y > 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 > 0$$

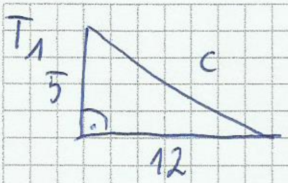
$$\underbrace{(x-1)^2}_{\text{większe od zera, gdyż } x \neq 1} + \underbrace{(y-2)^2}_{\text{liczba nieujemna}} > 0$$

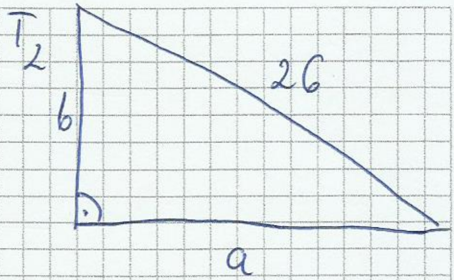
Suma liczby dodatniej i nieujemnej jest liczbą dodatnią, co kończy dowód

Zadanie 33. (0–2)

Trójkąty prostokątne T_1 i T_2 są podobne. Przyprostokątne trójkąta T_1 mają długości 5 i 12. Przeciwprostokątna trójkąta T_2 ma długość 26.

Oblicz pole trójkąta T_2.





$$c^2 = 5^2 + 12^2$$
$$c^2 = 25 + 144$$
$$c^2 = 169$$
$$c = 13$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5$$
$$P_1 = 30$$

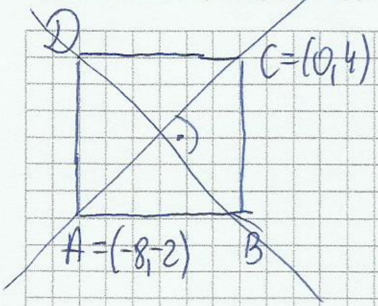
$T_2 \sim T_1$ w skali $k = 2$

$$\frac{P_2}{P_1} = k^2$$
$$\frac{P_2}{30} = 2^2$$
$$P_2 = 4 \cdot 30$$
$$P_2 = 120$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.	33.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 34. (0–2)

W kwadracie $ABCD$ punkty $A = (-8, -2)$ oraz $C = (0, 4)$ są końcami przekątnej. Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD tego kwadratu.



$$a_{AC} = \frac{4+2}{0+8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

pr $BD \perp$ pr. AC

$$a_{BD} = -\frac{4}{3}$$

$$S = \left(\frac{-8+0}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$$

$$S = (-4, 1)$$

pr BD: $y = -\frac{4}{3}x + b$

$$1 = -\frac{4}{3} \cdot (-4) + b$$

$$1 = \frac{16}{3} + b$$

$$1 - \frac{16}{3} = b$$

$$b = 1 - 5\frac{1}{3}$$

$$b = -4\frac{1}{3}$$

pr BD: $y = -\frac{4}{3}x - 4\frac{1}{3}$

Zadanie 35. (0–2)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15.

$\overline{\overline{\Omega}} = 8 \cdot 8$

$\overline{\overline{\Omega}} = 64$

$A = \{(3,5), (5,3), (6,5), (5,6), (9,5), (5,9)\}$

$\overline{\overline{A}} = 6$

$P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

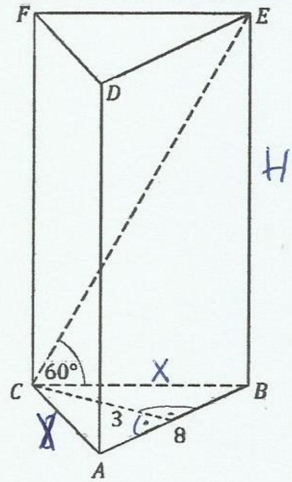
$P(A) = \dfrac{6}{64}$

$P(A) = \dfrac{3}{32}$

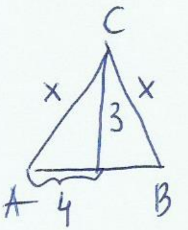
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.	35.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

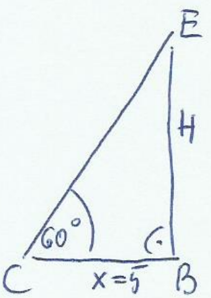
Zadanie 36. (0–5)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 8$. Wysokość trójkąta ABC, poprowadzona z wierzchołka C, ma długość 3. Przekątna CE ściany bocznej tworzy z krawędzią CB podstawy ABC kąt $60°$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.





$x^2 = 4^2 + 3^2$

$x^2 = 16 + 9$

$x^2 = 25$

$x = 5$

$tg\, 60° = \frac{H}{5}$

$\sqrt{3} = \frac{H}{5}$

$H = 5\sqrt{3}$

$V = P_p \cdot H$

$V = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{8} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{3}$

$V = 4 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{3}$

$V = 60\sqrt{3}$

$P_c = 2P_p + P_b$

$P_b = 2 \cdot x \cdot H + 8 \cdot H$

$P_b = 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} + 8 \cdot 5\sqrt{3}$

$P_b = 50\sqrt{3} + 40\sqrt{3}$

$P_b = 90\sqrt{3}$

$P_c = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 8 \cdot 3 + 90\sqrt{3}$

$P_c = 24 + 90\sqrt{3}$